

# 18. Vztah prostoru a času, vztah nedeterminismu a determinismu.

## Třídy složitosti Turingových strojů

### Časová složitost deterministického TS

Časová složitost výpočtu deterministického Turingova stroje  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$  na vstupu  $w \in \Sigma^*$  je funkce  $t_M : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  definovaná následovně:

- $t_M(w) = n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$  výpočet  $M$  na  $w$  zastaví po  $n$  krocích
- $t_M(w) = \infty \Leftrightarrow$  výpočet  $M$  na  $w$  nezastaví ( $M$  na  $w$  cyklí)

Časová složitost deterministického TS  $M$  je funkce  $T_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  definovaná jako  $T_M(n) = \max\{t_M(w) \mid w \in \Sigma^n\}$ . Jedná se tedy o maximální délku výpočtu na nějakém vstupu dané velikosti.

Pro funkci  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definujeme časovou třídu složitosti DTIME jako  $\text{DTIME}(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{existuje DTS } M \text{ takový, že } L = L(M) \text{ a } T_M(n) \leq f(n)\}$ .

### Časová složitost nedeterministického TS

Časová složitost nedeterministického TS  $M$  je funkce  $T_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  definovaná jako  $T_M(n) = \max\{t_M(w) \mid w \in \Sigma^n\}$ , kde  $t_M(w)$  je maximální počet kroků výpočtu  $M$  na  $w$  (nebo  $\infty$ , pokud  $M$  cyklí na  $w$ ). Jedná se tedy o délku nejdelšího výpočtu pro vstup dané délky.

Pro funkci  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definujeme časovou třídu složitosti NTIME jako  $\text{NTIME}(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{existuje NTM } M \text{ takový, že } L = L(M) \text{ a } T_M(n) \leq f(n)\}$ .

Pozn.: pokud pro vstup  $w \in \Sigma^*$  existuje výpočet na  $M$  takový, že  $M$  na  $w$  cyklí, pak  $T_M(|w|) = \infty$ . Pokud ale  $L(M) \in \text{NTIME}(f(n))$ , tak existuje jiný NTM  $M'$ , pro který výpočet  $M$  na  $w$  skončí po nejvýše  $f(|w|)$  krocích.

### Prostorová složitost deterministického TS

Nechť  $C = (q, \alpha \Delta^w, n)$  je konfigurace Turingova stroje  $M$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $\alpha \in \Gamma^* \setminus (\Gamma^* \{\Delta\}^+)$  (tzn.  $\alpha$  nekončí ani jedním symbolem  $\Delta$ ). Prostorová složitost konfigurace  $C$  je definována jako  $s(C) = \max\{|\alpha|, n\}$  (tzn. maximum z délky vstupu bez blank symbolů a pozice hlavy).

Prostorová složitost výpočtu deterministického TS  $M$  na vstupu  $w \in \Sigma^*$  je funkce  $s_M : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  definovaná jako  $s_M(w) = \max\{s_M(C) \mid (q_0, \Delta w \Delta^w, 0) \vdash_{DT}^* C\}$ , kde maximum nekonečné množiny je  $\infty$ . Jde tedy o maximální prostorovou složitost ze všech konfigurací během výpočtu.

Prostorová složitost TS  $M$  je funkce  $S_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  definovaná jako  $S_M(n) = \max\{s_M(w) \mid w \in \Sigma^n\}$ . Jedná se tedy o maximální délku pásky, která je využita během výpočtu na vstupech dané velikosti.

Pro funkci  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definujeme *prostorovou třídu složitosti* DSPACE jako  $DSPACE(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{existuje DTS } M \text{ takový, že } L = L(M) \text{ a } S_M(n) \leq f(n)\}$ .

## Prostorová složitost nedeterministického TS

Prostorová složitost nedeterministického TS  $M$  je funkce  $S_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  definovaná jako  $S_M(n) = \max\{s_M(w) \mid w \in \Sigma^n\}$ , kde  $s_M(w) = \max\{s_M(C) \mid (q_0, \Delta w \Delta^w, 0) \vdash_{NT}^* C\}$ . Jedná se tedy o maximální délku pásky, která je využita během všech větví výpočtu na vstupech dané velikosti.

Pro funkci  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definujeme *prostorovou třídu složitosti* NSPACE jako  $NSPACE(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{existuje NTS } M \text{ takový, že } L = L(M) \text{ a } S_M(n) \leq f(n)\}$ .

## Vztah nedeterminismu a determinismu

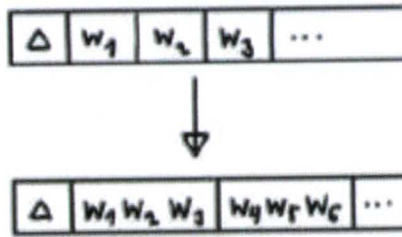
Pro všechny funkce  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  platí  $DSPACE(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n))$ . Tvrzení vyplývá z toho, že (deterministický) Turingův stroj je speciálním případem nedeterministického Turingova stroje.

## Lineární zrychlení a komprese prostoru

### Lineární zrychlení

Nechť  $L \in DSPACE(f(n))$ . Potom pro každé  $\epsilon > 0 : L \in DSPACE(\epsilon \cdot f(n) + n)$  (musíme zpracovat vstup, proto je v závorce  $+n$ ).

Důkaz: můžeme zkonstruovat Turingův stroj, který pracuje nad abecedou  $\Gamma \cup \Gamma^k$  pro nějakou vhodnou konstantu  $k$ . Takový Turingův stroj potom umí vykonat  $k$  kroků původního Turingova stroje jako jeden krok v konečně mnoha krocích.



### Lineární komprese prostoru

Nechť  $L \in \text{DSPACE}(g(n))$ . Potom pro každé  $\epsilon > 0 : L \in \text{DSPACE}(\epsilon \cdot g(n))$ .

Důkaz: můžeme zkonstruovat Turingův stroj, který pracuje nad abecedou  $\Gamma \cup \Gamma^k$  pro nějakou vhodnou konstantu  $k$ . Takový Turingův stroj potom umí vykonat  $k$  kroků původního Turingova stroje jako jeden krok v konečně mnoha krocích.

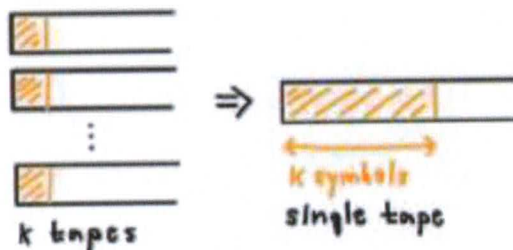
Lineární zrychlení a komprese prostoru platí také pro nedeterministické třídy složitosti. Pro všechny konstanty  $c > 0$  platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} \text{DTIME}(f(n)) &= \text{DTIME}(c \cdot f(n) + n) \\ \text{NTIME}(f(n)) &= \text{NTIME}(c \cdot f(n) + n) \\ \text{DSPACE}(f(n)) &= \text{DSPACE}(c \cdot f(n)) \\ \text{NSPACE}(f(n)) &= \text{NSPACE}(c \cdot f(n)) \end{aligned}$$

## Vztahy mezi jednopáskovými a vícepáskovými Turingovými stroji

Nechť  $M$  je vícepáskový TS s časovou složitostí  $f(n)$ . Potom existuje (jednopáskový) Turingův stroj  $M'$  takový, že  $L(M) = L(M')$  a  $M'$  rozpoznává jazyk  $L(M)$  s časovou složitostí  $f(n)^2$ .

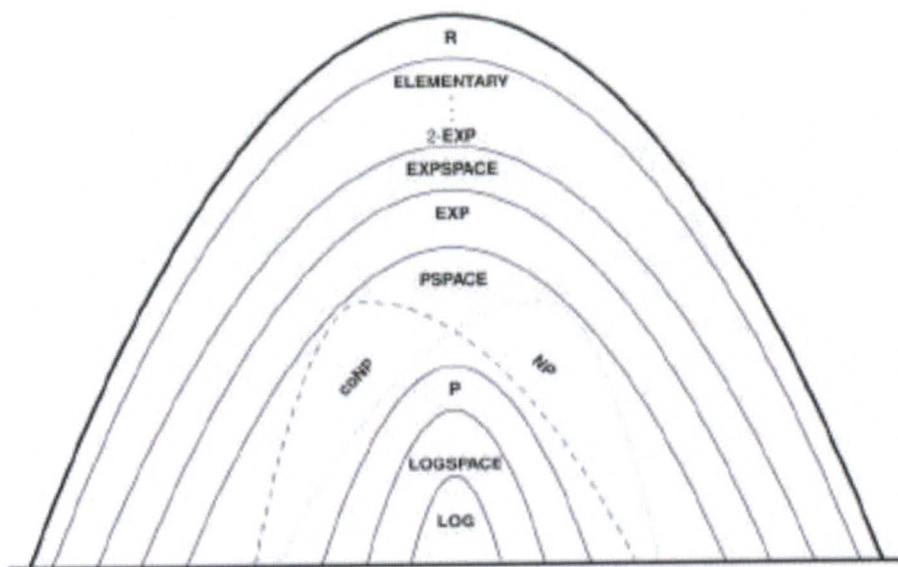
Tvrzení plyne z toho, že když z více pásek TS  $M$  vytvoříme jednu pásku, tak si musíme zapamatovat pozice hlav na jednotlivých páskách. Abychom pak získali všechny informace a provedli jeden krok výpočtu, musíme projít celou páskou, tedy v nejhorším případě provést  $f(n)$  kroků. Proto je výsledná časová složitost  $f(n)^2$ .



Nechť  $M$  je vícepáskový TS s prostorovou složitostí  $g(n)$ . Potom existuje (jednopáskový) Turingův stroj  $M'$  takový, že  $L(M) = L(M')$  a  $M'$  rozpoznává jazyk  $L(M)$  s prostorovou složitostí  $g(n)$ . Důkaz vyplývá z konstrukce takového jednopáskového Turingova stroje. Když z  $k$  pásek sestrojíme jednu, využitý prostor je pořád stejný.

Nechť  $M$  je vícepáskový TS s časovou složitostí  $f(n)$ . Pak existuje dvoupáskový TS  $M'$  takový, že  $L(M) = L(M')$  a  $M'$  rozpoznává  $L(M)$  s časovou složitostí  $O(f(n) \cdot \log(f(n)))$ .

## Vztahy mezi třídami složitosti



Platí následující inkluze mezi jednotlivými složitostními třídami:

$$\mathbf{DLOG \subseteq NLOG \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXP \subseteq NEXP}$$

Také platí:

$$\mathbf{DLOG \subseteq PSPACE}$$

$$\mathbf{P \subseteq EXP}$$

$$\mathbf{NP \subseteq NEXP}$$

$$\mathbf{PSPACE = NPSPACE}$$

$$\mathbf{EXPSPACE = NEXPSPACE}$$

$$\mathbf{P ? NP}$$

Idea důkazu některých inkluzí

1.  $\mathbf{DSPACE(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n))}$

Tvrzení vyplývá z faktu, že deterministický TS je speciálním případem nedeterministického TS.

2.  $\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n))$

Tvrzení vyplývá z faktu, že deterministický TS je speciálním případem nedeterministického TS.

3.  $\text{NTIME}(f(n)) \subseteq \bigcup_{c>0} \text{DTIME}(c^{f(n)})$

Je-li jazyk  $L$  přijímán nějakým NTS  $M_n$  v čase  $t(n)$ , pak je také přijímán nějakým DTS  $M_d$  v čase  $2^{O(t(n))}$ . Ukážeme, jak může  $M_d$  simulovat  $M_n$  v uvedeném čase. Očíslujeme si přechody  $M_n$  jako  $1, 2, \dots, k$ .  $M_d$  bude postupně simulovat veškeré možné posloupnosti přechodů  $M_n$ . Obsah vstupní pásky si uloží na pomocnou pásku, aby ho mohl vždy obnovit. Na jinou pásku si vygeneruje posloupnost přechodů z  $\{1, 2, \dots, k\}^*$  a tu simuluje. Vzhledem k možnosti nekonečných výpočtů  $M_n$  nelze procházet jeho možné výpočty do hloubky. Budeme-li je ale procházet do šířky (tj. Nejdřív všechny posloupnosti přechodů z  $\{1, 2, \dots, k\}^*$  délky 1, pak 2, ...), určitě nalezneme nejkratší přijímající posloupnost přechodů pro  $M_n$ , pokud existuje. Takto projdeme nanejvýš  $O(k^{t(n)})$  cest (počet všech možných cest délky  $t(n)$ ). Simulace každé z této cest je v  $O(t(n))$  a tudíž celkem využijeme nanejvýš čas  $O(k^{t(n)}) \cdot O(t(n)) = 2^{O(t(n))}$ .

4.  $\text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{DSpace}(f(n))$

Toto tvrzení je důsledek tvrzení  $\text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{f(n)})$ . Nedeterministický Turingův stroj  $M_n$  může provést maximálně  $f(n)$  nedeterministických rozhodnutí. Deterministický Turingův stroj  $M_d$ , který jej simuluje, používá  $f(n)$  buněk na pásce pro reprezentaci rozhodnutí Turingova stroje  $M_n$  (posloupnost přechodů z  $\{1, 2, \dots, k\}^*$ ) a nejvýše  $f(n)$  buněk pro simulování pásky  $M_n$ .  $M_d$  simuluje možné běhy  $M_n$  postupně jeden po druhém.

5.  $\text{NSpace}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(f(n))})$  pro  $f(n) \geq \log n$

Pro nedeterministický TS  $M$  a vstup  $w$  zavedeme *konfigurační graf*  $G(M, w)$ . Uzly takového grafu jsou konfigurace, které se mohou objevit během výpočtu  $M$  na  $w$ . Mezi uzly  $C_1$  a  $C_2$  je hrana právě tehdy, když se  $M$  může dostat z konfigurace  $C_1$  do  $C_2$  během jednoho kroku. Ptáme se, jestli existuje cesta z uzlu odpovídající počáteční konfiguraci do uzlu odpovídající akceptující konfiguraci. Pro každý vstup  $w$  lze počet uzlů grafu  $G(M, w)$  shora omezit výrazem  $2^{O(\log |w| + f(|w|))}$ . Víme, že problém dosažitelnosti (reachability) lze vyřešit v čase  $O(m^2)$  pro grafy s  $m$  uzly. Celkový čas potřebný pro deterministický Turingův stroj simulující  $M$  je tedy  $2^{O(\log n + f(n))}$ .

6. **Savitchův teorém:**  $\text{NSpace}(f(n)) \subseteq \text{DSpace}(f(n)^2)$  pro  $f(n) \geq \log n$

Uvažme nedeterministický TS  $M$  rozhodující  $L(M)$  v prostoru  $s(n)$ . Existuje  $k \in \mathbb{N}$  závislé jen na  $|Q|$  a  $|\Gamma|$  takové, že pro libovolný vstup  $w$  Turingův stroj  $M$  projde nanejvýš  $k^{s(n)}$  konfigurací o délce maximálně  $s(n)$ . To implikuje, že  $M$  provede pro  $w$  nanejvýš  $k^{s(n)} = 2^{s(n) \cdot \log k}$  kroků.

Pomocí deterministického Turingova stroje můžeme snadno implementovat proceduru  $path(x, y, i)$ , která otestuje, zda je možné v  $M$  dojít z konfigurace  $x$  do  $y$  v maximálně  $2^i$  krocích. Procedura vypadá následovně:

```

procedure path( $x, y, i$ )
if ( $i = 0$ ) then return ( $(x = y) \vee ((x, y) \in G)$ )
else for all vertices  $z \in G$  do
    if ( $path(x, z, i-1) \wedge path(z, y, i-1)$ ) then
        return true
return false

```

Pokud je  $i = 0$ , pak se musí jednat o ten samý uzel, nebo o dvojici sousedních uzlů. Pro  $i > 0$  testujeme, zda existuje uzel, do kterého se dostaneme z  $x$  v maximálně  $2^{i-1}$  krocích a z kterého se rovněž dostaneme do  $y$  v maximálně  $2^{i-1}$  krocích.

Při rekurzivním volání procedury  $path$  vzniká strom o výšce  $i$  simulující posloupností svých listů posloupnost  $2^i$  výpočetních kroků. Nyní k deterministické simulaci  $M$  postačí projít všechny akceptující konfigurace  $c_F$  takové, že  $|c_F| \leq s(n)$ , a ověřit, zda  $path(c_0, c_F, \lceil s(n) \cdot \log k \rceil)$ , kde  $c_0$  je počáteční konfigurace.

Každé vyvolání  $path$  zabere prostor  $O(s(n))$ , hloubka rekurze je  $\lceil s(n) \cdot \log k \rceil = O(s(n))$  a tedy celkově deterministicky simulujeme  $M$  v prostoru  $O(s(n)^2)$ .

Důsledkem Savitchova teorému jsou již dříve uvedené rovnosti: **PSPACE = NPSPACE** a **k-EXSPACE = k-NEXSPACE**.

*Pokud v textu najdete chybu, nebudete něčemu rozumět nebo budete mít dojem, že by bylo vhodné něco doplnit, kontaktujte na discordu uživatele barborasmahlikova.*

6/10