

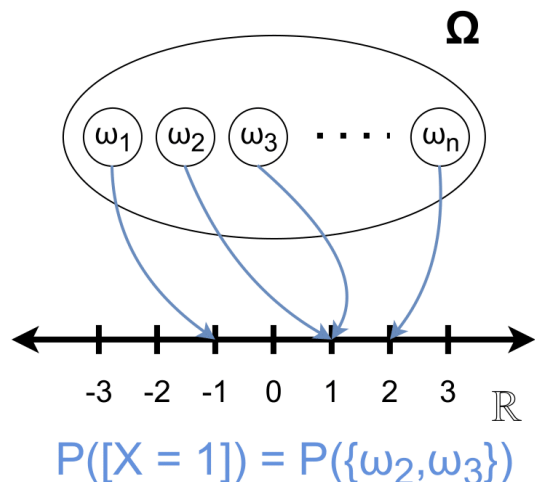
48. Náhodná proměnná, typy náhodné proměnné, funkční a číselné charakteristiky, významná rozdělení pravděpodobnosti.

Odkaz na video: [SZZ: Náhodné veličiny, významná rozdělení pravděpodobnosti](#)

Video pokrývá témata: *Náhodné veličiny. Pravděpodobnostní prostor (opakování). Náhodná veličina. Diskrétní náhodná veličina. Číselné charakteristiky diskrétních náhodných veličin. Významná diskrétní rozdělení pravděpodobnosti. Alternativní rozdělení pravděpodobnosti. Binomické rozdělení pravděpodobnosti. Geometrické rozdělení pravděpodobnosti. Hypergeometrické rozdělení pravděpodobnosti. Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti. Spojité náhodné veličiny. Číselné charakteristiky spojitých náhodných veličin. Významná spojitá rozdělení pravděpodobnosti. Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti. Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti. Normální rozdělení pravděpodobnosti. Standardizované normální rozdělení pravděpodobnosti.*

Náhodná proměnná/veličina

Ať (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor. Zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je **náhodná veličina** na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{S}, P) , pokud $\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{S}$. Jinak řečeno, náhodná veličina odpovídá nějakému náhodnému pokusu, jehož výsledek dokážeme ohodnotit pomocí reálného čísla. Následně nás bude zajímat pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá nějaké konkrétní hodnoty, případně že náhodná veličina nabývá hodnoty z nějakého intervalu.



Dále definujeme

- $[X = x] \triangleq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$
 - množina všech výsledků náhodného pokusu, kterým náhodná veličina přiřazuje ohodnocení x
- $[X < x] \triangleq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$
 - množina všech výsledků náhodného pokusu, kterým náhodná veličina přiřazuje ohodnocení menší než x
- *analogicky* $[X \leq x]$, $[X > x]$, $[X \geq x]$, $[x < X < y]$, $[x \leq X < y]$, $[x < X \leq y]$, $[x \leq X \leq y]$
- $P(X = x) \triangleq P([X = x])$
 - pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnoty x
 - syntaktický cukr pro omezení počtu závorek
- $P(X < x) \triangleq P([X < x])$
 - pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnoty menší než x
 - syntaktický cukr pro omezení počtu závorek
- *analogicky* $P(X \leq x)$, $P(X > x)$, $P(X \geq x)$, $P(x < X < y)$, $P(x \leq X < y)$, $P(x < X \leq y)$, $P(x \leq X \leq y)$

Příklad. Losujeme náhodně dvě karty z balíčku. Po vylosování první karty vrátíme tuto kartu do balíčku a balíček před dalším výběrem zamícháme. Každá karta může mít červenou (srdce, káry), nebo černou (piky, kříže) barvu. Základní prostor $\Omega = \{\bullet\bullet, \bullet\blacklozenge, \blacklozenge\bullet, \blacklozenge\blacklozenge\}$ značí možné výsledky pokusu.

$\mathbb{S} = 2^\Omega$, $\forall \omega \in \Omega : P(\{\omega\}) = 1/4$. Mějme náhodnou veličinu X nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathbb{S}, P) , která udává, kolikrát byla vytažena červená karta, tedy

$$X(\blacklozenge\blacklozenge) = 0, X(\bullet\blacklozenge) = 1, X(\blacklozenge\bullet) = 1, X(\bullet\bullet) = 2.$$

Zřejmě

- $P(X = 0) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\}) = P(\{\blacklozenge\blacklozenge\}) = 1/4$
- $P(X = 1) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\}) = P(\{\bullet\blacklozenge, \blacklozenge\bullet\}) = P(\{\bullet\blacklozenge\}) + P(\{\blacklozenge\bullet\}) = 1/2$

- $P(X = 2) = 1/4$
- $P(X = 3) = 0$
- $P(X \leq 0) = 1/4$
- $P(X \leq 1) = 3/4$
- $P(X \leq 2) = 1$
- $P(X \leq 3) = 1$

Diskrétní náhodná veličina

Ať (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a ať X je náhodná veličina nad tímto pravděpodobnostním prostorem. X je **diskrétní náhodná veličina**, pokud je její obor hodnot konečná, nebo spočetně nekonečná množina. Náhodná veličina X představená v předchozím příkladu je diskrétní náhodná veličina.

Ať X je diskrétní náhodná veličina nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathcal{S}, P) s oborem hodnot A ,

$p : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ je zobrazení. Zobrazení p je **pravděpodobnostní funkcí**, pokud

- $\forall x \in A : p(x) = P(X = x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus A : p(x) = 0$

Pravděpodobnostní funkce tedy pro argument x stanovuje, jaká je pravděpodobnost, že diskrétní náhodná veličina nabývá právě hodnoty x . Pro každou pravděpodobnostní funkci musí platit $\sum_{x \in A} p(x) = 1$.

Ať X je diskrétní náhodná veličina nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathcal{S}, P) , $F : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ je zobrazení. Zobrazení F je **distribuční funkcí**, pokud

- $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P(X \leq x)$

Distribuční funkce tedy pro argument x stanovuje, jaká je pravděpodobnost, že diskrétní náhodná veličina nabývá hodnoty x nebo nižší. Pro každou distribuční funkci musí platit $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

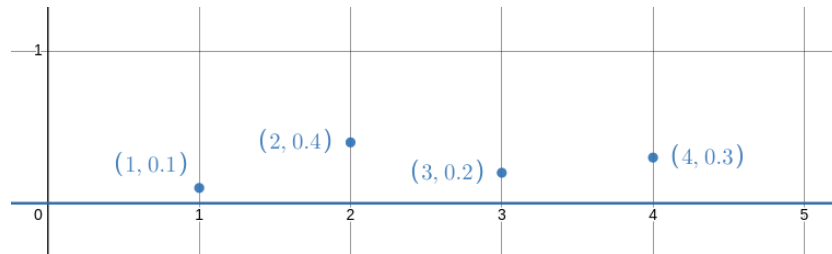
Příklad. Mějme základní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, systém $\mathcal{S} = 2^\Omega$ a pravděpodobnost určenou jako $\forall \omega \in \Omega : P(\{\omega\}) = 1/10$. Nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathcal{S}, P) zaveďme diskrétní náhodnou veličinu X , která udává, kolik dělitelů má daný prvek základního prostoru:

$$X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 2, X(4) = 3, X(5) = 2, X(6) = 4, X(7) = 2, X(8) = 4, X(9) = 3, X(10) = 4.$$

Pravděpodobnostní funkce p udává, jaká je pravděpodobnost, že vybrané číslo má právě x dělitelů.

- $p(0) = 0$
- $p(1) = 1/10$
- $p(2) = 4/10$
- $p(3) = 2/10$
- $p(4) = 3/10$
- $p(5) = 0$

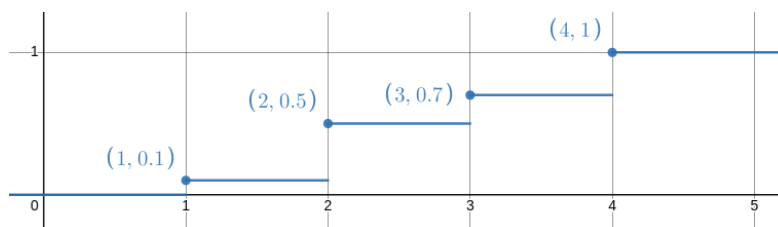
Pravděpodobnostní funkce graficky (nevykreslené hodnoty jsou zobrazovány na nulu):



Distribuční funkce F udává, jaká je pravděpodobnost, že vybrané číslo má právě x dělitelů nebo méně.

- $F(0) = 0$
- $F(1) = p(1) = 1/10$
- $F(2) = p(1) + p(2) = 5/10$
- $F(3) = p(1) + p(2) + p(3) = 7/10$
- $F(4) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$
- $F(5) = 1$

Část distribuční funkce graficky:



Charakteristiky diskrétních náhodných veličin

Ať (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a ať X je diskrétní náhodná veličina nad tímto pravděpodobnostním prostorem.

Střední hodnota. Střední hodnota EX diskrétní náhodné veličiny X odpovídá očekávané hodnotě, kterou by diskrétní náhodná veličina nejpravděpodobněji mohla nabývat vzhledem k povaze náhodné veličiny X . Jde o analogii aritmetického průměru ve statistice. Řekněme, že diskrétní náhodná veličina X nabývá nenulových hodnot pro elementy $a \in A$. Pak definujeme:

$$EX = \sum_{a \in A} (a \cdot p(a))$$

Pro střední hodnoty EX , EY diskretních náhodných veličin X , Y platí:

- $E(X + Y) = EX + EY$
- $E(X - Y) = EX - EY$
- $E(cX) = c \cdot EX$
- $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow E(a + bX + cY) = a + bEX + cEY$
- pokud jsou X , Y nezávislé, pak $E(XY) = EX \cdot EY$

Rozptyl. Rozptyl DX diskretní náhodné veličiny X popisuje, jak moc je pravděpodobnost rozptýlena kolem střední hodnoty EX . Platí

$$DX = E(X - EX)^2$$

tedy pokud diskretní náhodná veličina X nabývá nenulových hodnot pro elementy $a \in A$, definujeme

$$DX = \sum_{a \in A} (a - EX)^2 \cdot p(a) = - (EX)^2 + \sum_{a \in A} (a^2 \cdot p(a))$$

Pro rozptyly DX , DY diskretních náhodných veličin X , Y platí:

- $DX, DY > 0$
- $a \in \mathbb{R} \Rightarrow D(a + X) = DX$
- $a \in \mathbb{R} \Rightarrow D(aX) = a^2DX$
- $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow D(a + bX) = b^2DX$
- pokud jsou X , Y nezávislé, pak $D(X + Y) = DX + DY$
- pokud jsou X , Y nezávislé, pak $D(X - Y) = DX + DY$

Významná diskretní rozdělení pravděpodobnosti

Ať (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a ať X je diskretní náhodná veličina nad tímto pravděpodobnostním prostorem.

Alternativní rozdělení pravděpodobnosti

Náhodná veličina X je náhodná veličina s **alternativním rozdělením pravděpodobnosti** s parametrem

$p \in \langle 0, 1 \rangle$, což je psáno jako $X \sim \mathbf{A}(p)$, pokud

- $p(0) = 1 - p$

- $p(1) = p$

Alternativní rozdělení pravděpodobnosti popisuje počet úspěchů u jednoho provádění pokusu, u něž nastane úspěch s pravděpodobností p a neúspěch s pravděpodobností $1 - p$. Jiný výsledek pokusu není možný.

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X s alternativním rozdělením pravděpodobnosti platí:

- $EX = p$
- $DX = p(1-p)$

Příklad. Hodíme jedenkrát poctivou kostkou. Základní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ značí možné výsledky pokusu. $\mathbb{S} = 2^\Omega$, $\forall \omega \in \Omega : P(\{\omega\}) = 1/6$. Mějme náhodnou veličinu X nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathbb{S}, P) , která udává, zda na kostce padlo liché prvočíslo (úspěch) nebo jiné číslo (neúspěch).

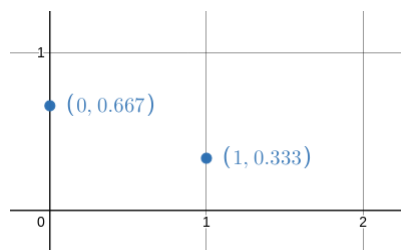
Zřejmě

- $[X = 0] = \{1, 2, 4, 6\}$
- $[X = 1] = \{3, 5\}$
- $P(X = 0) = 2/3$
- $P(X = 1) = 1/3$

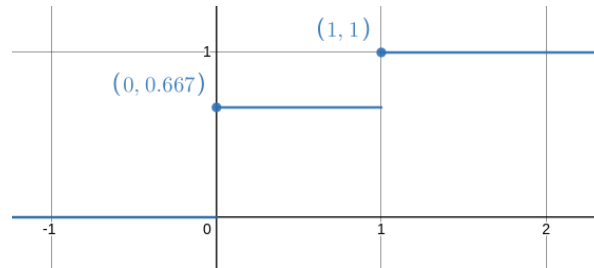
Náhodná veličina X je náhodnou veličinou s alternativním rozdělením pravděpodobnosti $X \sim \mathbf{A}(1/3)$. Pravděpodobnostní funkce je tedy následující:

- $p(0) = 2/3$
- $p(1) = 1/3$
- nulová pro ostatní vstupy

Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ graficky:



Distribuční funkce $F(x)$ graficky:



Binomické rozdělení pravděpodobnosti

Náhodná veličina X je náhodná veličina s **binomickým rozdělením pravděpodobnosti** s parametry

$n \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 0, 1 \rangle$, což je psáno jako $X \sim \mathbf{Bi}(n, p)$ pokud

- $$\forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n \Rightarrow p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Binomické rozdělení pravděpodobnosti popisuje **počet úspěchů u opakovaného provádění pokusu**, přičemž pokusů je provedeno n a jsou na sobě nezávislé. Pravděpodobnost úspěchu každého pokusu se rovná p . Jiný výsledek pokusu než úspěch/neúspěch není možný. $P(X = k)$ tedy popisuje pravděpodobnost, že úspěšných bylo právě k provedení pokusu, ostatní pokusy byly neúspěšné. Ve vzorci pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení se objevuje kombinační číslo z toho důvodu, že pokud z n pokusů je úspěšných právě k , existuje obecně více způsobů, jak něčeho takového dosáhnout (více různých pořadí úspěchů a neúspěchů při provádění pokusů).

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X s binomickým rozdělením pravděpodobnosti platí:

- $EX = np$
- $DX = np(1-p)$

Příklad. Hodíme čtyřikrát poctivou mincí, na níž může padnout hlava, nebo ocas. Základní prostor

$\Omega = \{H, T\}^4$. $\mathbb{S} = 2^\Omega$, $\forall \omega \in \Omega : P(\{\omega\}) = 1/16$. Mějme náhodnou veličinu X nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathbb{S}, P) , která udává, kolikrát na minci padl ocas.

Zřejmě:

- $[X = 0] = \{(H, H, H, H)\}$
- $[X = 1] = \{(H, H, H, T), (H, H, T, H), (H, T, H, H), (T, H, H, H)\}$
- ...
- $P(X = 0) = 1/16$
- $P(X = 1) = 1/4$
- ...

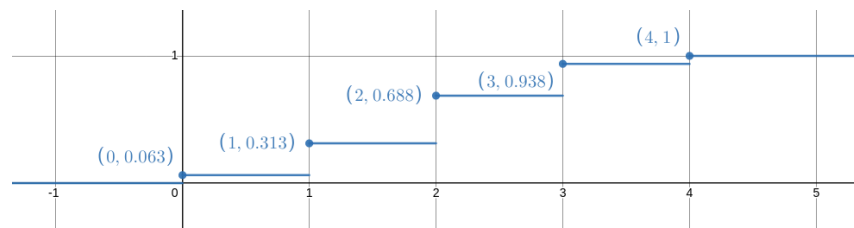
Náhodná veličina X je náhodnou veličinou s binomickým rozdělením pravděpodobnosti $X \sim \text{Bi}(4, 1/2)$, neboť provádíme 4 pokusy a pravděpodobnost úspěchu (na poctivé minci padne ocas) je $1/2$. Pravděpodobnostní funkce je tedy následující:

- $p(0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{16}$
- $p(1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{1}{4}$
- $p(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{3}{8}$
- $p(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$
- $p(4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} = \frac{1}{16}$
- nulová pro ostatní vstupy

Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ graficky:



Distribuční funkce $F(x)$ graficky:



Diskrétní rovnoměrné rozložení pravděpodobnosti

Náhodná veličina X je náhodná veličina s **diskrétním rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti** s parametry $a, b \in \mathbb{N}$, kde $a \leq b$, což je psáno jako $X \sim \text{Ro}(a, b)$ pokud

- $\forall k \in \mathbb{N} : a \leq k \leq b \Rightarrow p(k) = 1/(b - a + 1)$

Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti jednoduše přiřazuje všem přirozeným číslům mezi a a b stejnou pravděpodobnost.

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X s diskrétním rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti platí:

- $EX = \frac{a+b}{2}$
- $DX = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$

Příklad. Hodíme jedenkrát poctivou kostkou. Základní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ značí možné výsledky pokusu. $\mathbb{S} = 2^\Omega$, $\forall \omega \in \Omega : P(\{\omega\}) = 1/6$. Mějme náhodnou veličinu X nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathbb{S}, P) , která udává výsledek hodu.

Zřejmě

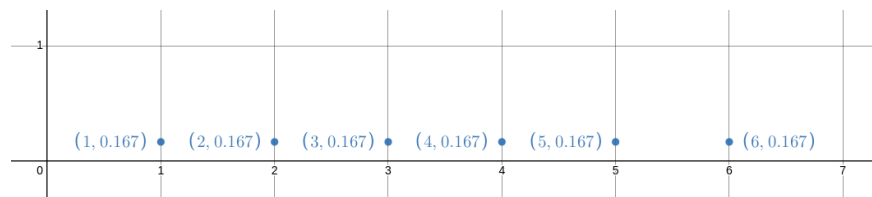
- $[X = 1] = \{1\}$
- $[X = 2] = \{2\}$
- ...
- $P(X = 1) = 1/6$
- $P(X = 2) = 1/6$
- ...

Náhodná veličina X je náhodnou veličinou s diskrétním rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti

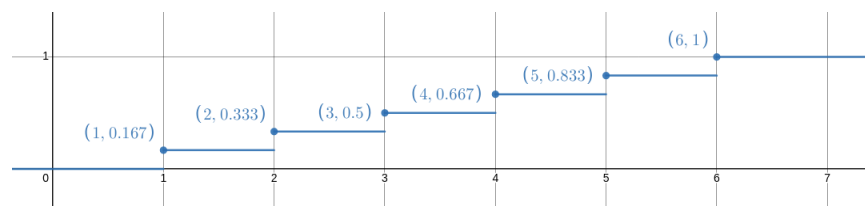
$X \sim \text{Ro}(1, 6)$. Pravděpodobnostní funkce je tedy následující:

- $\forall k \in \Omega : p(k) = 1/6$
- nulová pro ostatní vstupy

Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ graficky:



Distribuční funkce $F(x)$ graficky:



Geometrické rozdělení pravděpodobnosti

Náhodná veličina X je náhodná veličina s **geometrickým rozdělením pravděpodobnosti** s parametrem

$p \in \langle 0, 1 \rangle$, což je psáno jako $X \sim \text{Ge}(p)$ pokud

- $\forall k \in \mathbb{N}^+ : p(k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$

Geometrické rozdělení pravděpodobnosti popisuje počet **opakovaného provádění nezávislého pokusu, který je prováděn tak dlouho, dokud pokus neskončí úspěchem.**

Pravděpodobnost úspěchu každého pokusu se rovná p . Jiný výsledek pokusu než úspěch/neúspěch není možný. $P(X = k)$ tedy popisuje pravděpodobnost, že k . pokus byl úspěšný a všechny předchozí pokusy byly neúspěšné.

Zřejmě $F(k) = 1 - (1 - p)^k$, což lze odvodit pomocí součtu konečně mnoha členů geometrické posloupnosti.

Geometrické rozdělení pravděpodobnosti se někdy definuje i pro nulu, v takovém případě

- $p(k) = p \cdot (1-p)^k$
- $F(k) = 1 - (1 - p)^{k+1}$

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X s geometrickým rozdělením pravděpodobnosti platí:

- $EX = \frac{1}{p}$
- $DX = \frac{1-p}{p^2}$

Příklad. Házíme poctivou mincí tak dlouho, dokud nepadne ocas. Výsledek jednoho hodu je hlava (H), nebo ocas (T). Základní prostor popíšeme regulárním výrazem $\Omega = \{H\}^* \{T\}$. $\mathbb{S} = 2^\Omega$, $\forall \omega \in \Omega : P(\{\omega\}) = 2^{-|\omega|}$. Mějme náhodnou veličinu X nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathbb{S}, P) , která udává, kolikrát pokusů bylo třeba provést, než na minci padl ocas.

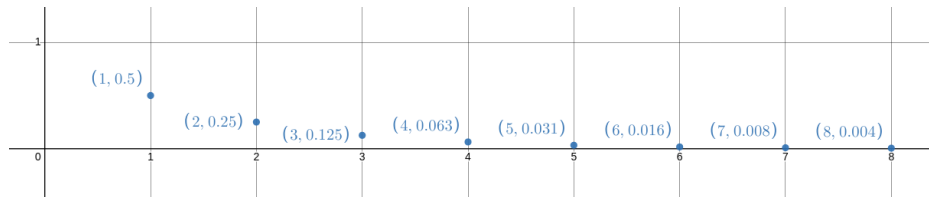
Zřejmě

- $[X = 1] = \{T\}$
- $[X = 2] = \{HT\}$
- $[X = 3] = \{HHT\}$
- $[X = 4] = \{HHHT\}$
- ...
- $P(X = 1) = P(\{T\}) = 1/2$
- $P(X = 2) = P(\{HT\}) = 1/4$
- $P(X = 3) = P(\{HHT\}) = 1/8$
- $P(X = 4) = P(\{HHHT\}) = 1/16$
- ...

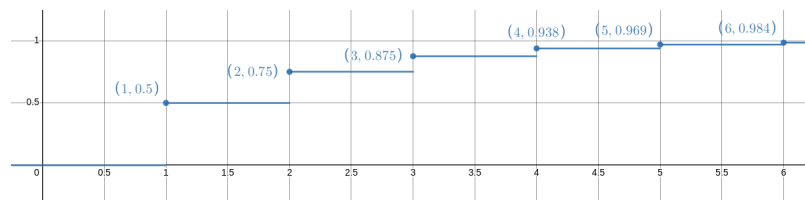
Náhodná veličina X je náhodnou veličinou s geometrickým rozdělením pravděpodobnosti $X \sim \text{Ge}(1/2)$. Pravděpodobnostní funkce je tedy následující:

- $\forall k \in \mathbb{N}^+ : p(k) = (1/2) \cdot (1/2)^{k-1} = (1/2)^k$
- nulová pro ostatní vstupy

Část pravděpodobnostní funkce $p(x)$ tedy vypadá takto:



Část distribuční funkce $F(x)$ tedy vypadá takto:



Geometrické rozdělení pravděpodobnosti je jediné diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, které má vlastnost *bezpečnosti*, jež je významná v Markovských procesech:

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n)$$

Zřejmě $P(X > m + n \mid X > m) = P(X > m + n \wedge X > m) / P(X > m) = P(X > m + n) / P(X > m)$, tedy vlastnost bezpečnosti lze zapsat jako

$$\begin{aligned} P(X > m + n) &= P(X > n)P(X > m) \\ (1 - F(m + n)) &= (1 - F(n))(1 - F(m)) \end{aligned}$$

Ať $X \sim \text{Ge}(p)$ je náhodná veličina nad nějakým pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathbb{S}, P) . Aby geometrické rozdělení pravděpodobnosti bylo bezpečné, muselo by tedy platit

$$\begin{aligned} (1 - (1 - (1 - p)^{m+n})) &= (1 - (1 - (1 - p)^n))(1 - (1 - (1 - p)^m)) \\ (1 - p)^{m+n} &= (1 - p)^n (1 - p)^m \end{aligned}$$

což zřejmě platí, tedy geometrické rozdělení pravděpodobnosti je bezpečné.

Hypergeometrické rozdělení pravděpodobnosti

Náhodná veličina X je náhodná veličina s **hypergeometrickým rozdělením pravděpodobnosti** s parametry $N, M, n \in \mathbb{N}$, kde $M, n \leq N$ což je psáno jako $X \sim \text{Hg}(N, M, n)$ pokud

$$\bullet \quad \forall \max\{0, n - (N - M)\} \leq k \leq \min\{n, M\} : p(k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

V kontextu hypergeometrického rozdělení pravděpodobnosti má parametr N význam počtu elementů v nějakém souboru, parametr M značí počet těchto elementů, které mají nějakou sledovanou vlastnost a n počet výběrů z daného souboru, přičemž po provedení výběru element **nevracíme** zpět do souboru. To je rozdíl oproti binomickému rozdělení, které by se dalo vysvětlit obdobně, avšak s tím rozdílem, že po provedení pokusu bychom element vrátili zpět do souboru (mohl by být vybrán i v dalším pokusu). V případě hypergeometrického rozdělení tedy existuje určitá závislost mezi jednotlivými provedeními pokusu.

Diskrétní náhodná veličina s hypergeometrickým rozdělením pravděpodobnosti popisuje, **kolik vybraných elementů z daného souboru má danou sledovanou vlastnost**.

Je třeba zavést podmínky $M \leq N$, neboť počet elementů s danou vlastností může být nanejvýš roven počtu elementů v souboru, $n \leq N$, neboť nanejvýš můžeme ze souboru vybrat N elementů, protože vybraný element již **nevracíme** zpět mezi ostatní.

Pravděpodobnostní funkce je definovaná pro k splňující $\max\{0, n - (N - M)\} \leq k \leq \min\{n, M\}$, aby byla jednotlivá kombinační čísla korektní.

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X s hypergeometrickým rozdělením pravděpodobnosti platí:

$$\bullet \quad EX = n \cdot \frac{M}{N}$$
$$\bullet \quad DX = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Příklad. Máme deset karet, mezi nimiž jsou čtyři esa (A_1, A_2, A_3, A_4). Zbytek karet má jiné ohodnocení (7, 8, 9, J, Q, K). Vybíráme bez vracení do balíčku tři karty. Mějme náhodnou veličinu X nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathcal{S}, P) , která udává, kolik z vybraných karet odpovídá esu.

Zřejmě

- $[X = 0] = \{789, 78J, 78Q, 78K, \dots\}$
- $[X = 1] = \{A_178, A_179, A_17J, A_17Q, \dots\}$
- $[X = 2] = \{A_1A_27, A_1A_28, A_1A_29, A_1A_2J, \dots\}$
- $[X = 3] = \{A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_2, A_1A_3A_4, \dots\}$

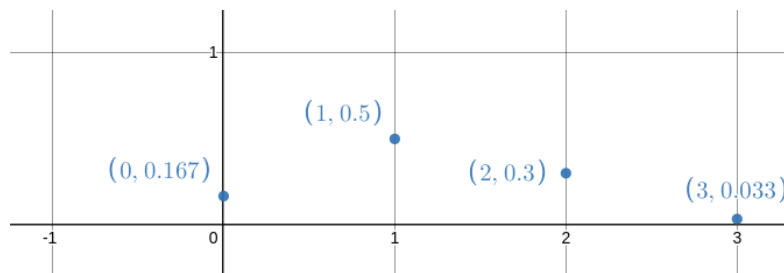
Náhodná veličina X je náhodnou veličinou s hypergeometrickým rozdělením pravděpodobnosti $X \sim \text{Hg}(10, 4, 3)$, neboť vybíráme z 10 karet ($N = 10$), pouze 4 karty mají sledovanou vlastnost ($M = 4$) a vybíráme právě 3 karty bez vracení ($n = 3$). Pravděpodobnostní funkce je tedy následující:

- $\forall 0 \leq k \leq 3 : p(k) = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}$
- nulová pro ostatní vstupy

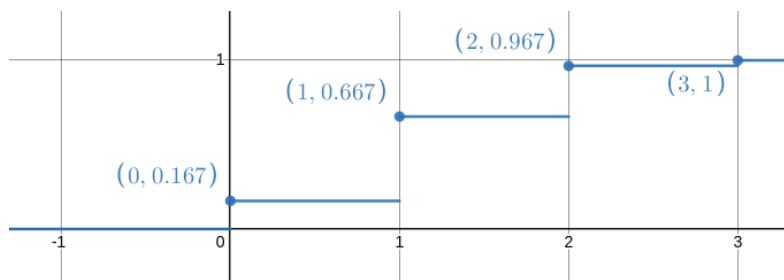
Tedy

- $p(0) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$
- $p(1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$
- $p(2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$
- $p(3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$

Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ tedy vypadá takto:



Distribuční funkce $F(x)$ tedy vypadá takto:



Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti

Náhodná veličina X je náhodná veličina s **Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti** s parametrem

$\lambda > 0$, což je psáno jako $\mathbf{X} \sim \mathbf{Po}(\lambda)$ pokud

- $\forall k \in \mathbb{N} : p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti popisuje **počet událostí za jednotku času**, pokud je dán průměrný počet událostí λ za jednotku času. Jde o takové události, které

- nastávají izolovaně (nemůže nastat ve stejný okamžik táž událost vícekrát)
- nastávají nezávisle na sobě (jeden výskyt události neovlivňuje další výskyty události)
- pravděpodobnost výskytu události v nějakém intervalu $(t, t+h)$ závisí na šířce intervalu h , nikoliv na umístění intervalu v rámci časové osy t

Procesu splňujícím tyto podmínky se říká Poissonovský proces.

Poissonovo rozdělení lze vztahovat k libovolné časové jednotce, parametr λ je vztahený vůči ní. Toto rozdělení je možné použít i pro jiné veličiny, než je čas, například pro vzdálenost.

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X s Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti platí překvapující vztahy:

- $EX = \lambda$
- $DX = \lambda$

Příklad. V nemocnici se narodí průměrně tři miminka za den. Narození miminek považujeme za Poissonovský proces. Mějme náhodnou veličinu X nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathbb{S}, P) , která udává, kolik miminek se v porodnici narodilo za den.

Zřejmě

- $P(X = 0) = p(0) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} = 0.0498$

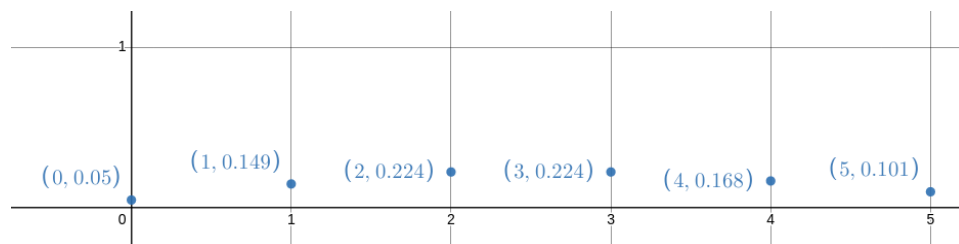
- $P(X = 1) = p(1) = \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} = 0.1494$
- $P(X = 2) = p(2) = \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} = 0.2240$
- $P(X = 3) = p(3) = \frac{3^3}{3!} \cdot e^{-3} = 0.2240$
- $P(X = 4) = p(4) = \frac{3^4}{4!} \cdot e^{-3} = 0.1680$
- ...
- $P(X = 20) = p(20) = \frac{3^{20}}{20!} \cdot e^{-3} = 7.1354 \cdot 10^{-11}$
- ...

Existuje tedy nenulová pravděpodobnost pro narození libovolného počtu miminek během dne.

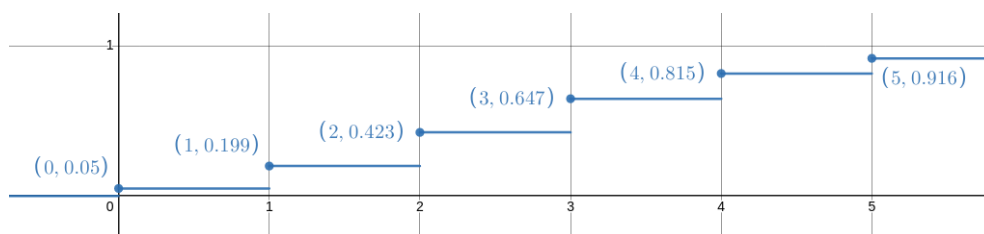
Náhodná veličina X je náhodnou veličinou s Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti $X \sim \text{Po}(3)$. Jako jednotku jsme zvolili den. Pravděpodobnostní funkce je tedy následující:

- $\forall k \in \mathbb{N} : p(k) = \frac{3^k}{k!} \cdot e^{-3}$
- nulová pro ostatní vstupy

Část pravděpodobnostní funkce $p(x)$ tedy vypadá takto:



Část distribuční funkce $F(x)$ tedy vypadá takto:



Spojité náhodná veličina

At' (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a at' X je náhodná veličina nad tímto pravděpodobnostním prostorem. X je **spojitá náhodná veličina**, pokud existuje reálné zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že

- $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$
 - tedy funkce je v každém bodě nezáporná
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} : a < b \Rightarrow P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$
 - tedy pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnoty na nějakém intervalu, je dána určitým Newtonovým integrálem funkce f přes tento interval

Funkci f nazeveme **funkcí hustoty rozdělení pravděpodobnosti**. U diskrétní náhodné veličiny musel být součet všech nenulových obrazů pravděpodobnostní funkce roven 1. Zde se potýkáme se spojitým oborem hodnot, tedy musí platit

$$\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = 1,$$

tedy určitý integrál funkce $f(x)$ přes celou reálnou osu musí být roven 1.

Při vyhodnocování pravděpodobnosti, že spojitá náhodná veličina nabývá hodnoty na nějakém intervalu (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ jsou otevřené a uzavřené intervaly zaměnitelné. Stejně tak jsou zaměnitelné ostré a neostré relace uspořádání $<$, $>$, \leq , \geq , tedy

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

pro $a < b$.

U spojitě náhodné veličiny typicky vyjadřujeme pravděpodobnost, že veličina nabývá nějaké hodnoty na intervalu. Pravděpodobnost, že spojitá náhodná veličina nabývá jedné konkrétní hodnoty, je vždy nulová:

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0,$$

kde $F(x)$ je primitivní k $f(x)$.

At' (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a at' X je spojitá náhodná veličina nad tímto pravděpodobnostním prostorem. Podobně jako u diskrétních náhodných veličin definujeme (kumulativní) **distribuční funkci** spojitě náhodné veličiny X **$F(x)$** jako

$$F(x) = P(X \leq x),$$

tedy pravděpodobnost, že spojitá náhodná veličina X nabývá hodnoty nižší než X . Tu definujeme pomocí integrálu:

$$F(a) = P(X \leq a) = P(-\infty < X < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Jinak řečeno, integrujeme funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti přes reálnou osu od $-\infty$ až do bodu a .

Pro distribuční funkci platí:

- $F'(x) = f(x)$
 - tedy hustota rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny je derivací distribuční funkce
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ je neklesající funkce
- $P(X \leq a) = F(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - F(a)$
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a)$

Charakteristiky spojitých náhodných veličin

Ať (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a ať X je spojitá náhodná veličina nad tímto pravděpodobnostním prostorem. Zatímco u diskrétních náhodných veličin se střední hodnota a rozptyl počítaly pomocí sumy, v případě spojitých náhodných veličin využijeme integraci

Střední hodnota. Definujeme střední hodnotu EX :

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Rozptyl. Definujeme rozptyl DX :

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (EX)^2$$

Významná spojitá rozdělení pravděpodobnosti

Ať (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a ať X je spojitá náhodná veličina nad tímto pravděpodobnostním prostorem.

Spojité rovnoměrné (uniformní) rozložení pravděpodobnosti

Spojité náhodná veličina X je náhodná veličina se **spojitým rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti** s parametry $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$, což je psáno jako $X \sim \text{Uni}(a, b)$ pokud

- $\forall x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \Rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a}$
- jinak je hodnota hustoty rozdělení pravděpodobnosti nulová

Jde o takovou spojitou náhodnou veličinu, kde je hustota rozdělení pravděpodobnosti na intervalu $\langle a, b \rangle$ konstantní a všude jinde je nulová. To znamená, že pokud $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle$ jsou dva podintervaly intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$, pak $P(a_1 < X < b_1) = P(a_2 < X < b_2)$, tedy pravděpodobnost, že spojitá náhodná veličina nabývá hodnoty z prvního intervalu je stejná, jako že nabývá hodnoty z druhého intervalu.

Distribuční funkci $F(x)$ lze vyjádřit $\forall x \in \mathbb{R}$ jako:

- $x < a \Rightarrow F(x) = 0$
- $a \leq x < b \Rightarrow F(x) = \frac{x-a}{b-a}$
- $b \leq x \Rightarrow F(x) = 1$

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X se spojitým rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti platí:

- $EX = \frac{a+b}{2}$
- $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

Příklad. Starožitné kukačky se dopustí jediného mohutného zakukání každých 15 minut. Štěně vběhne do starožitnictví v náhodný okamžik a vyplašené uteče, jakmile kukačky zakukají. Mějme náhodnou veličinu X nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathcal{S}, P) , která udává dobu čekání na zakukání kukaček.

Náhodná veličina X je spojitou náhodnou veličinou se spojitým rovnoměrným (uniformním) rozdělením pravděpodobnosti $X \sim \text{Uni}(0, 15)$.

Platí $\forall x \in \mathbb{R}$:

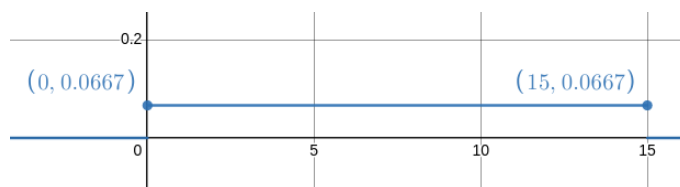
- $x < 0 \Rightarrow f(x) = 0$
- $0 \leq x \leq 15 \Rightarrow f(x) = 1/15$
- $x > 15 \Rightarrow f(x) = 0$

- $x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$
- $0 \leq x \leq 15 \Rightarrow F(x) = x/15$
- $x > 15 \Rightarrow F(x) = 1$

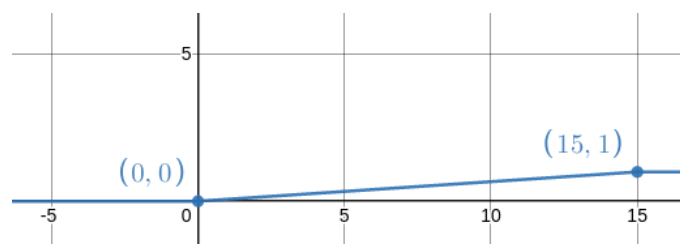
Můžeme spočítat například:

- pravděpodobnost, že štěně stráví ve starožitnictví méně než 2 minuty
 - $P(X \leq 2) = F(2) = 2/15$
- pravděpodobnost, že štěně stráví ve starožitnictví více než 10 minut
 - $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1/3$
- pravděpodobnost, že štěně stráví ve starožitnictví méně než 8, ale více než 5 minut
 - $P(5 \leq X \leq 8) = F(8) - F(5) = 8/15 - 5/15 = 1/5$
- pravděpodobnost, že štěně ve starožitnictví stráví přesně 2 minuty
 - $P(2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(2) = 0$
- pravděpodobnost, že štěně ve starožitnictví stráví čas mezi 2 minutami a 2 minutami a 1 sekundou
 - $P(2 \leq X \leq 2 + 1/60) = F(2 + 1/60) - F(2) = 1/900$

Část funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $f(x)$ tedy vypadá takto:



Část distribuční funkce $F(x)$ tedy vypadá takto:



Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti

Spojité náhodná veličina X je náhodná veličina s **exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti** s parametrem $\lambda > 0$, což je psáno jako $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ pokud $\forall x \in \mathbb{R}$:

- $x < 0 \Rightarrow f(x) = 0$
- $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Jde o takovou spojitou náhodnou veličinu, kde parametr λ popisuje **průměrný počet událostí za jednotku času**, přičemž události splňují vlastnost Poissonova procesu:

- nastávají izolovaně (nemůže nastat ve stejný okamžik táž událost vícekrát)
- nastávají nezávisle na sobě (jeden výskyt události neovlivňuje další výskyt události)
- pravděpodobnost výskytu události v nějakém intervalu $(t, t+h)$ závisí na šířce intervalu h , nikoliv na umístění intervalu v rámci časové osy t

Spojité náhodné veličiny X s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti tedy popisuje, jaká je pravděpodobnost, že **doba mezi dvěma událostmi, které se odehrají po sobě**, bude z nějakého intervalu $\langle a, b \rangle$.

Toto rozdělení je svázáno s diskrétním Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti. Zatímco Poissonovo rozdělení popisuje počet událostí za jednotku času, exponenciální rozdělení popisuje dobu čekání mezi dvěma takovými událostmi. V případě Poissonova rozdělení i v případě exponenciálního rozdělení je parametr λ průměrný počet událostí za jednotku času.

Distribuční funkci $F(x)$ lze vyjádřit $\forall x \in \mathbb{R}$ jako:

- $x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$
- $x \geq 0 \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti platí:

- $EX = \frac{1}{\lambda}$
- $DX = \frac{1}{\lambda^2}$

Exponenciální rozdělení se někdy obecněji definuje jako rozdělení se dvěma parametry $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda, a)$, kde nový parametr $a \geq 0$ vyjadřuje spodní hranici doby mezi dvěma událostmi, tedy doba mezi dvěma událostmi v takovém případě nemůže být z intervalu $\langle 0, a \rangle$ pro $a > 0$. Jde o **posunuté exponenciální rozdělení**. V takovém případě $\forall x \in \mathbb{R}$:

- $x < a \Rightarrow f(x) = 0$
- $x \geq a \Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}$
- $x < a \Rightarrow F(x) = 0$
- $x \geq a \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-a)}$

Příklad. Jednosměrkou projíždí automobily. Průjezd těchto automobilů považujeme za Poissonovský proces. Průměrná doba mezi průjezdy dvou automobilů jednosměrkou činí 12 minut. Mějme náhodnou veličinu X nad pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathcal{S}, P) , která udává, jaká doba uběhne mezi průjezdy dvou automobilů jednosměrkou.

Náhodná veličina X je spojitou náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti

$X \sim \text{Exp}(1/12)$, neboť pracujeme s minutami jakožto s jednotkou. Událost nastává průměrně po 12 minutách, tedy za 1 minutu průměrně nastane $1/12$ události průjezdu automobilu jednosměrkou.

Pozn.: Můžeme samozřejmě vybrat jinou jednotku, například hodiny. Poté pracujeme s náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti $Y \sim \text{Exp}(5)$, neboť za hodinu průměrně nastane těchto událostí 5. Při práci s hustotou rozdělení pravděpodobnosti a s distribuční funkcí poté musíme myslet na to, jaké jednotky jsme zvolili, a dosazovat do těchto funkcí argumenty převedené na tuto jednotku.

Platí $\forall x \in \mathbb{R}$:

- $x < 0 \Rightarrow f(x) = 0$
- $0 \leq x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{12} \cdot e^{-\frac{1}{12} \cdot x}$

- $x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$
- $0 \leq x \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{12} \cdot x}$

Pro každý neprázdný interval na kladné poloose reálných čísel tedy existuje nenulová pravděpodobnost, že doba mezi průjezdem dvou automobilů jednosměrkou bude právě v tomto intervalu.

Můžeme spočítat například:

- pravděpodobnost, že dva automobily po sobě projedou za méně než 12 minut
 - $P(X < 12) = F(12) = 1 - e^{-(1/12) \cdot 12} = 1 - 1/e = 0.63212$
- pravděpodobnost, že dva automobily po sobě projedou za více než 12 minut
 - $P(X > 12) = 1 - F(12) = e^{-(1/12) \cdot 12} = 1/e = 0.36788$
- pravděpodobnost, že dva automobily po sobě projedou v intervalu mezi 1 a 2 minutami
 - $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = 0.07356$
- pravděpodobnost, že dva automobily po sobě projedou v intervalu mezi 11 a 12 minutami
 - $P(11 < X < 12) = F(12) - F(11) = 0.03197$
- pravděpodobnost, že dva automobily po sobě projedou v intervalu mezi 111 a 112 minutami
 - $P(111 < X < 112) = F(112) - F(111) = 0.00000768$

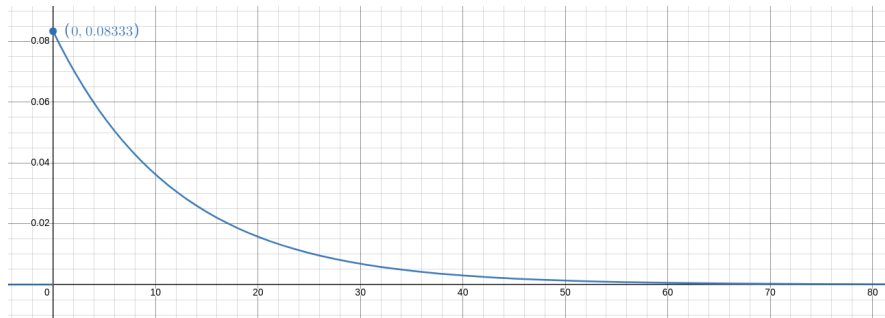
V případě spojitě náhodné veličiny $Y \sim \text{Exp}(5)$, kde jako jednotku používáme hodiny, bychom některé předchozí výpočty vyjádřili takto:

- *pravděpodobnost, že dva automobily po sobě projedou za méně než 12 minut*

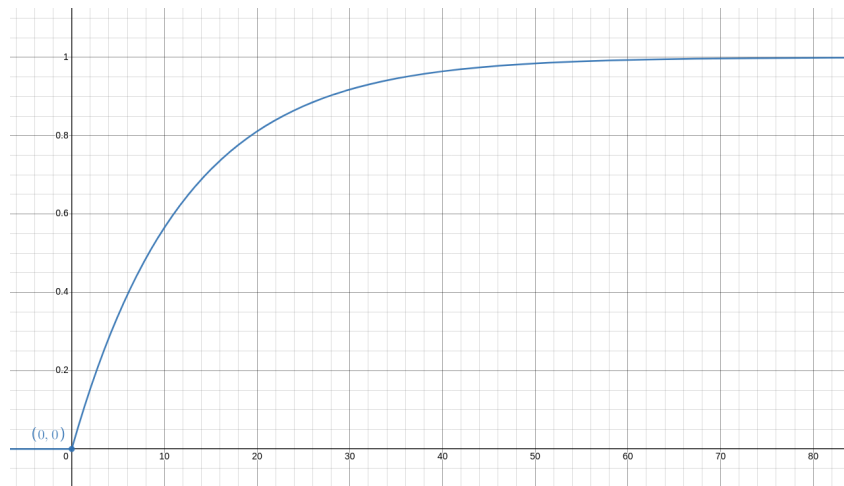
- 12 minut je 1/5 hodiny
- $P(Y < 1/5) = F(1/5) = 1 - e^{-(5) \cdot 1/5} = 1 - 1/e = 0.63212$
- pravděpodobnost, že dva automobily po sobě projedou v intervalu mezi 1 a 2 minutami
 - 1 minuta je 1/60 hodiny, 2 minuty jsou 1/30 hodiny
 - $P(1/60 < Y < 1/30) = F(1/30) - F(1/60) = (1 - e^{-(5) \cdot 1/30}) - (1 - e^{-(5) \cdot 1/60}) = e^{-(5) \cdot 1/60} - e^{-(5) \cdot 1/30} = 0.07356$

Výsledky jsou stejné jako v případě spojité náhodné veličiny X .

Část funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $f(x)$ tedy vypadá takto:



Část distribuční funkce $F(x)$ tedy vypadá takto:



Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti je jediné spojité rozdělení pravděpodobnosti, které má vlastnost *bezpečnosti*, jež je významná v Markovských procesech:

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n)$$

Na základě vlastnosti *memorylessness* platí následující: ($k = m$, $t = n$)

Má vlastnost *memoryless*ness: $P(X > k+t | X > k) = P(X > t)$

≈ 1 (když je $> k+t$, určitě je $> k$)

$$P(X > k+t | X > k) = \frac{P(X > k | X > k+t) \cdot P(X > k+t)}{P(X > k)}$$

$$= \frac{P(X > k+t)}{P(X > k)} = P(X > t) \Rightarrow P(X > k+t) = P(X > t) \cdot P(X > k)$$

Potom tedy můžeme psát:

$$P(X > m+n) = P(X > n)P(X > m)$$

$$(1 - F(m+n)) = (1 - F(n))(1 - F(m))$$

Ať $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ je náhodná veličina nad nějakým pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathcal{S}, P) . Aby exponenciální rozdělení pravděpodobnosti bylo bezpaměťové, muselo by tedy platit

$$(1 - (1 - e^{-\lambda(m+n)})) = (1 - (1 - e^{-\lambda n}))(1 - (1 - e^{-\lambda m}))$$

$$e^{-\lambda(m+n)} = e^{-\lambda n} e^{-\lambda m}$$

což zřejmě platí, tedy exponenciální rozdělení pravděpodobnosti je bezpaměťové.

Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti

Spojité náhodné veličiny X je náhodná veličina s **normálním rozdělením pravděpodobnosti** s parametry $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$, což je psáno jako $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ pokud $\forall x \in \mathbb{R}$:

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$

Jde o nejvýznamnější rozdělení pravděpodobnosti, které popisuje velké množství reálných jevů. Pomocí něj lze také za určitých okolností poměrně přesně aproximovat různá další rozdělení pravděpodobnosti.

Distribuční funkce normálního rozdělení je vyšší transcendentní funkce, tedy není možné ji vyjádřit pomocí konečně mnoha složení elementárních funkcí. Hodnoty distribuční funkce normálního rozdělení se aproximují pomocí numerických metod.

Parametru μ se říká **střední hodnota normálního rozdělení** a určuje bod, kde $f(x)$ dosahuje maxima. Parametr σ^2 je **rozptylem normálního rozdělení** a vyjadřuje, jak moc jsou vysoké hodnoty funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti rozptýleny kolem střední hodnoty.

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X s normálním rozdělením pravděpodobnosti tedy platí:

- $EX = \mu$
- $DX = \sigma^2$

V tomto případě jsou střední hodnota a rozptyl přímo parametry rozdělení.

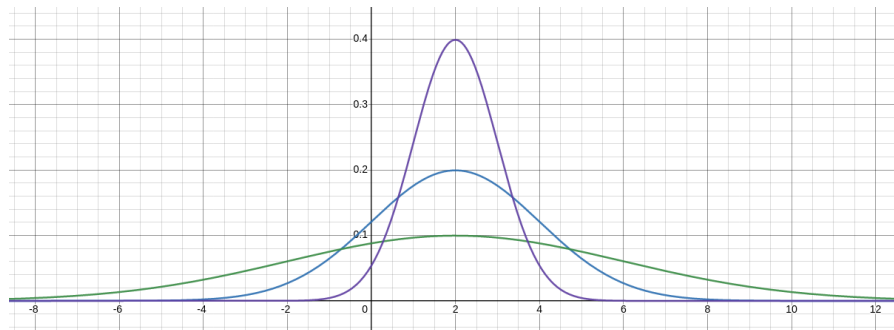
Pravidlo tří σ (tří sigma). Ať X je spojitá náhodná veličina s normálním rozdělením pravděpodobnosti

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pravidlo tří sigma říká, že pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnoty z intervalu

- $\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$ je asi 68,27 %
- $\langle \mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma \rangle$ je asi 95,45 %
- $\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$ je asi 99,73 %

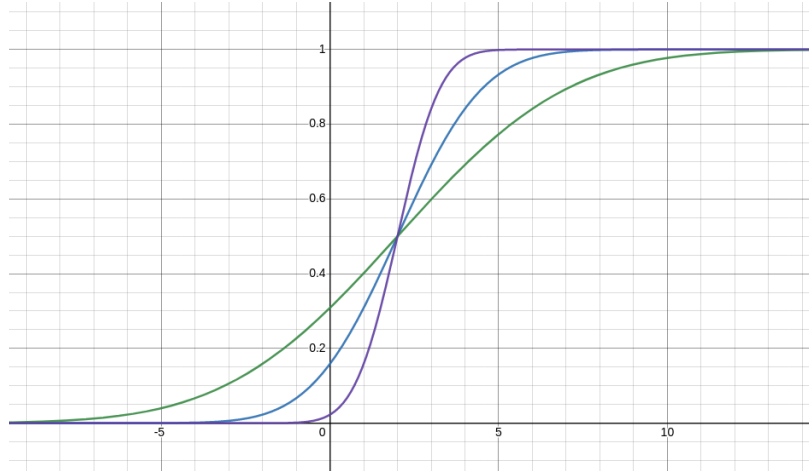
Příklad. Mějme tři spojitě náhodné veličiny $X \sim N(2, 4)$, $Y \sim N(2, 16)$, $Z \sim N(2, 1)$. Grafy hustoty rozdělení pravděpodobnosti těchto spojitých náhodných veličin jsou zčásti vyobrazeny na následujícím obrázku

(X je vyznačeno modře, Y zeleně, Z fialově):



Je zřejmé, že v bodě $[2, f(2)]$ nabývají všechny funkce maxima, neboť všechny tyto veličiny mají střední hodnotu 2. Nižší rozptyl značí vyšší kumulaci pravděpodobnosti u střední hodnoty a naopak.

Následující graf ukazuje část numericky spočítané distribuční funkce těchto spojitých náhodných veličin:



Standardizované normální rozdělení pravděpodobnosti

Standardizované normální rozdělení pravděpodobnosti je rozdělení $U \sim N(0, 1)$, tedy odpovídá spojitě náhodné veličině s normálním rozdělením pravděpodobnosti, kde $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Distribuční funkce spojitě náhodné veličiny se standardizovaným normálním rozdělením pravděpodobnosti se značí $\Phi(x)$ a hodnoty této funkce se nacházejí v statistických tabulkách.

Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X se standardizovaným normálním rozdělením pravděpodobnosti platí:

- $EX = 0$
- $DX = 1$

Motivací za standardizovaným normálním rozdělením pravděpodobnosti je fakt, že každá spojitá náhodná veličina s normálním rozdělením pravděpodobnosti je převoditelná na spojitou náhodnou veličinu se standardizovaným normálním rozdělením pravděpodobnosti. Při běžných výpočtech je tedy možné každou veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ převést na $U \sim N(0, 1)$ a hodnoty distribuční funkce $\Phi(x)$ vyčíst z tabulek.

Ať $U \sim N(0, 1)$ je spojitá náhodná veličina se standardizovaným normálním rozdělením pravděpodobnosti a ať $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je spojitá náhodná veličina s normálním rozdělením pravděpodobnosti. Pak platí:

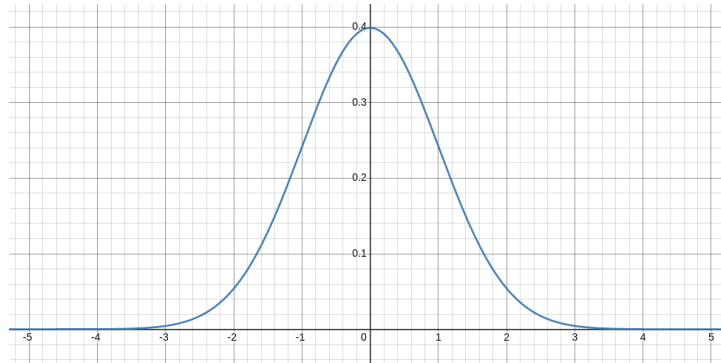
$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$P(X < b) = P\left(U < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

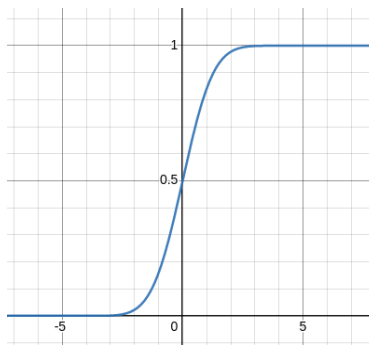
$$P(X > a) = P\left(U > \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < U < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Na následujícím obrázku lze vidět část grafu funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $f(x)$ standardizovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti $U \sim N(0, 1)$. Všimněme si pravidla tří sigma (intervaly $\langle -1, 1 \rangle$, $\langle -2, 2 \rangle$, $\langle -3, 3 \rangle$):



Na následujícím obrázku lze vidět část grafu distribuční funkce $F(x)$ standardizovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti $U \sim N(0, 1)$:



Některé další méně obvyklé číselné charakteristiky

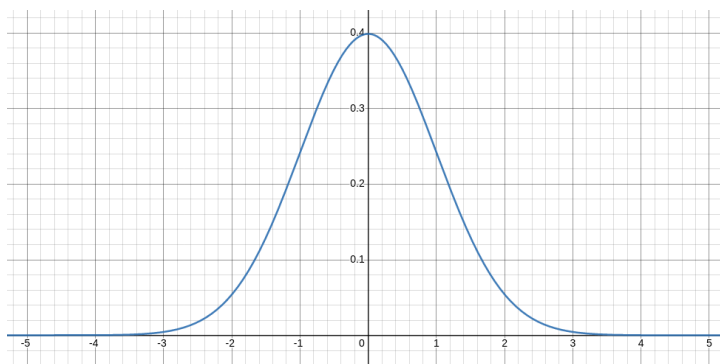
Ať (Ω, \mathcal{S}, P) je pravděpodobnostní prostor a ať X je náhodná veličina nad tímto pravděpodobnostním prostorem.

Šikmost. Šikmost náhodné veličiny X je číselná charakteristika $a_3(X)$, která popisuje míru nesymetrie náhodné veličiny. Pokud jsou hodnoty náhodné veličiny symetricky rozprostřeny kolem střední hodnoty, pak je šikmost náhodné veličiny nulová. Kladné hodnoty šikmosti vyjadřují, že vpravo od střední hodnoty se vyskytují odlehlejší hodnoty (pravý ocásek), u záporné hodnoty šikmosti platí totéž pro hodnoty vlevo od střední hodnoty (levý ocásek). Šikmost lze vypočítat jako:

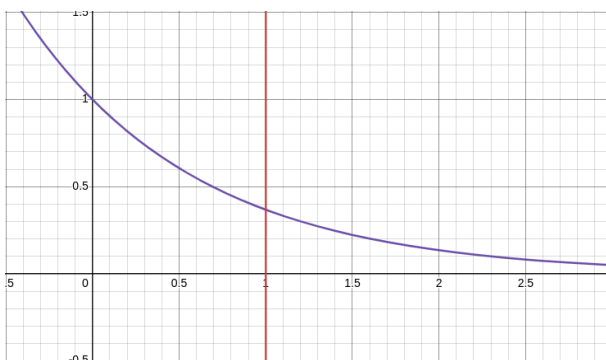
$$a_3(X) = \frac{E[X - E(X)]^3}{\sqrt{(DX)^3}}$$

Pro spojitou náhodnou veličinu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s normálním rozdělením pravděpodobnosti vždy platí, že její koeficient šikmosti je nulový, neboť funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je symetrická kolem střední hodnoty.

$$a_3(X) = \frac{E[X - E(X)]^3}{\sqrt{(DX)^3}} = \frac{E[X - \mu]^3}{\sigma^3} = \frac{E[\sigma U]^3}{\sigma^3} = \frac{\sigma^3 E[U]^3}{\sigma^3} = E[U]^3 = 0$$



Pro spojitou náhodnou veličinu s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ například platí, že $a_3(X) = 2$, tedy koeficient šikmosti je stále stejný nezávisle na parametru λ . Na grafu funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny $X \sim \text{Exp}(1)$ lze vidět, že vpravo od střední hodnoty (vyznačeno červeně) se nachází odlehlejší hodnoty:



Špičatost. Špičatost náhodné veličiny X je číselná charakteristika $a_4(X)$ (někdy též $Kurt(X)$ z řeckého *kurtosis*), která popisuje koncentraci hodnot blízko průměru a dále od něj, není to však totéž jako rozptyl. Špičatost se používá pro porovnávání rozdělení pravděpodobnosti s normálním rozdělením, které má špičatost 3.

$$a_4(X) = \frac{E[X - E(X)]^4}{(DX)^2}$$

Obecný moment. K-tý obecný moment náhodné veličiny X je číselná charakteristika μ'_k definovaná jako

$$\mu'_k = E[X^k],$$

pokud daná střední hodnota existuje.

Centrální moment. K-tý centrální moment náhodné veličiny X je číselná charakteristika μ_k definovaná jako

$$\mu_k = E[X - E[X]]^k,$$

pokud daná střední hodnota existuje. Všimněme si, že rozptyl je **druhým centrálním momentem** náhodné veličiny, šikmost je **třetím centrálním momentem** děleným $(DX)^{3/2}$ a špičatost je **čtvrtým centrálním momentem** děleným $(DX)^2$.

Pokud v textu najdete chybu, nebudete něčemu rozumět nebo budete mít dojem, že by bylo vhodné něco doplnit, kontaktujte na discordu uživatele kocotom.